PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 5
(Nivel Intermedio)

Problema 1

Si se sabe que: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...=\frac{\pi^2}{6}$, ¿cuál es el valor de :

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+...?$$

Solución

Despejando tenemos que:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+.. &= \frac{\pi^2}{6}-(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+...)\\ &= \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...)\\ &= \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}\\ &= \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

Problema 2

Una función f definida en los enteros satisface que:

$$f(n)=\begin{cases} n+3, & \text{si } n \text{ es impar}\\ \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$

Si k es un entero impar y $f(f(f(k)))=27$, ¿cuál es la suma de los dígitos de k?

Solución

Como k es impar, $f(k)=k+3$. Como $k+3$ es par entonces $f(f(k))=f(k+3)=\frac{k+3}{2}$. Si $\frac{k+3}{2}$ es impar, entonces

$$27=f(f(f(k)))=f(\frac{k+3}{2})=\frac{k+3}{2}+3,$$

de donde k = 45. Pero esto no es posible porque $f(f(f(45)))=f(f(48))=f(24)=12$. Por lo tanto $\frac{k+3}{2}$ es par. Luego

$$27=f(f(f(k)))=f(\frac{k+3}{2})=\frac{k+3}{4},$$

de donde $k=105$. Verificando, tenemos que $f(f(f(105)))=f(f(108))=f(54)=f(27)$. Por lo tanto la suma de los dígitos de k es 6.

Problema 3

Simplifica:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Solución

Tenemos que:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}=\frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)}$$

Además:

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} &= \frac{c-a}{c+a}(1+\frac{(a-b)(b-c)}{(a+b)(b+c)}\\ &= \frac{c-a}{c+a}(\frac{2b(c+a)}{(a+b)(b+c)})\\ &= \frac{2b(c-a)}{(a+b)(b+c)}\\ &= -\frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)}.\end{aligned}$$

Luego, la expresión original es igual a 0.