PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 1
(Nivel Intermedio)

Problema 1
Hay 5 clavijas amarillas, 4 clavijas rojas, 3 verdes, 2 azules y 1 anaranjada que se van a colocar en el arreglo triangular que se muestra. ¿De cuántas maneras pueden colocarse las clavijas de tal modo que ninguna fila (horizontal) ni ninguna columna (vertical) contenga dos clavijas del mismo color?
O
O O
O O O
O O O O
O O O O O

Solución
Para evitar que se tengan dos clavijas amarillas en la misma fila o columna, debe haber exactamente una clavija amarilla en cada fila y en cada columna. Luego, comenzando por la parte superior del arreglo, la clavija en la primera fila debe ser amarilla, la segunda clavija de la segunda fila debe ser amarilla, la tercera clavija de la tercera fila debe ser amarilla, etc. Para evitar que se tengan dos clavijas rojas en alguna fila, debe haber una clavija roja en cada una de las filas, 2, 3, 4 y 5. Las clavijas rojas deben estar en la primera posición en la segunda fila, en la segunda posición en la tercela fila, etc. Continuando de esta manera llegamos a que hay un solo arreglo que cumple las condiciones del problema, como se muestra en el siguiente diagrama:
a
r a
v r a
az v r a
an az v r a

Problema 2
¿Cuántos divisores enteros positivos tiene el número 10^{10}?.

Solución
Sabemos que $10 = 2{\cdot}5$ por lo que $10^{10} = 2^{10}{\cdot}5^{10}$. Los divisores de este número serán de la forma $2^i{\cdot}5^k$ donde $0 \leq i \leq 10$ y $0 \leq k \leq 10$. Así que ambos i y k pueden tomar 11 valores distintos y el valor de uno no depende del otro por lo que, entonces, hay, en total, $11{\cdot}11 = 121$ divisores enteros positivos de 10^{10}.

Problema 3
Se quieren pintar las casillas de un tablero 4 x 4 de blanco y de negro, de tal manera que haya exactamente dos casillas negras y dos casillas blancas en cada renglón y en cada columna. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

Solución
Tenemos $\binom{4}{2} = 6$ maneras de pintar dos casillas negras en el primer renglón.
Dividimos en casos. 1. Las casillas negras del segundo renglón están en las mismas columnas que las casillas negras del primer renglón. En este caso, una vez pintadas las casillas del primer renglón, las

casillas del segundo renglón quedan fijas y sólo hay una manera de pintar las casillas de los últimos dos renglones para que la configuración cumpla las condiciones del problema.

2. Ambas casillas negras del segundo renglón están en distintas columnas que las casillas negras del primer renglón. En este caso, una vez pintadas las casillas del primer renglón hay una única manera de pintar las casillas negras del segundo renglón. Tenemos entonces $\binom{4}{2} = 6$ maneras de pintar las casillas del tercer renglón, y el cuarto renglón queda determinado.

3. Exactamente una casilla negra del segundo renglón está en la misma columna que una casilla negra del primer renglón. En este caso, al pintar el segundo renglón hay dos maneras de elegir la columna común con una casilla pintada del primer renglón, y hay dos maneras más de pintar la casilla restante. es decir, hay cuatro maneras de pintar el segundo renglón. Independientemente de cómo se hayan pintado los primeros dos renglones, hay 2 maneras de pintar el tercer renglón y el cuarto renglón queda determinado. Luego, en este caso hay 4 x 2 = 8 posibilidades.
Así que en total hay: $6 + 36 + 48 = 90$ coloraciones posibles.