PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 3
(Nivel Intermedio)

Problema 1
Sea $ABCD$ un cuadrado de centro O. Sobre los lados DC y AD se han construido los triángulos equiláteros EDC y FAD. ¿Cuál es la razón del área del triángulo FDE entre el área del triángulo DOC?.

Solución

El área del triángulo DOC es $\dfrac{bh}{2} = \dfrac{x(\frac{x}{2})}{2} = \dfrac{x^2}{4}$. Si trazamos la altura h del triángulo FDE desde el vértice E a la recta FD, y llamamos H a la intersección de ésta con la recta FD, tenemos que el ángulo EDH mide 30º por lo que la recta DH es la bisectriz de un triángulo equilatero así que también es la mediatriz del lado CE por lo que $h = \dfrac{x}{2}$ y el áre del triángulo $FDE = \dfrac{x(\frac{x}{2})}{2} = \dfrac{x^2}{4}$ y, entonces la relación entre las áreas de estos triángulos es 1.

Problema 2
Si a y b son números enteros positivos, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{500}?$$

Solución

Reescribiendo la ecuación, tenemos que $500a+500b = ab$. Sumando 500^2 en ambos lados, tenemos:

$$ab - 500a - 500b + 500^2 = 500^2$$
$$a(b-500) - 500(b-500) = 500^2$$
$$(a-500)(b-500) = 500^2.$$

Si hacemos x $= a - 500$, $y = b - 500$, la ecuación queda como $xy = 500^2$. Como $a = x + 500$ ¿0 y $b = y$+500 ¿0, entonces x¿-500, y ¿-500. Si -500¡x ¡0 y -500¡y ¡0, entonces xy ¡500^2 lo cual no es posible. Luego, x ¿0, y ¿0. Por lo tanto, el número de soluciones de la ecuación es el número de divisores positivos de 500^2. Descomponiendo 500 en factores primos, tenemos que $500^2 = (2^2{,}5^3)^2 = 2^4{,}5^6$, es decir, el número de divisores positivoes 500^2 es $(4+1)(6+1) = 35$

Problema 3
¿De cuántas formas se puede llenar una cuadrícula de n=10 columnas y dos finas con 1's y -1's de tal manera que la suma de los números en cada fila y en cada columna sea 0? Para cuáles n se puede lograr esto y de cuántas maneras?

Solución

En general en la fila de arriba, por cada 1 que haya tiene que haber un -1 para que estos se cancelen y al final la suma de todos sea 0 por lo que n tiene que ser siempre par. Ahora, se puede llenar esta cuadrícula de $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ ya que la fila de arriba tiene que tener $\dfrac{n}{2}$ 1's y después de colocarlos todo lo demás queda determinado ya que en el resto de la primera fila se ponen -1's y luego en la segunda fila se pone lo opuesto de lo que esté en la primera fila.