PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 2
(Nivel Intermedio)

Problema 1
Después de desarrollar y reducir términos semejantes, ¿cuántos términos quedan en la expresión:

$$(x+y+z)^{2008}+(x-y-z)^{2008}?$$

Solución
Sabemos que $(x+y+z)^{2008}+(x-y-z)^{2008}=(x+(y+z))^{2008}+(x-(y+z))^{2008}$?. Luego, por el teorema del binomio tenemos que:
$(x+y+z)^{2008}+(x-y-z)^{2008}=\sum_{k=0}^{2008}\binom{2008}{k}x^k(y+z)^{2008-k}+\sum_{k=0}^{2008}(-1)^k\binom{2008}{k}x^k(y+z)^{2008-k}$
$=2\ (\binom{2008}{0}(y+z)^{2008}+\binom{2008}{2}x^2(y+z)^{2006}+\ ...\ +\binom{2008}{2008}\mathrm{x}^{2008})$
Como cada uno de los sumandos de la expresión dada está multiplicado por una potencia distinta de x, basta contar cuántos términos hay en $(y+z)^{2008}$, $(y+z)^{2006}$, ..., $(y+z)^0$. Nuevamente por el teorema del binomio, se sigue que en $(y+z)^i$ hay $i+1$ términos. Por lo tanto en la expresión hay: $2009+2007+...+1=1005^2$ términos.

Problema 2
Dos circunferencias C_1 y C_2 tienen una cuerda común AB. se elige un punto P en C_1 de manera que quede afuera de C_2. Sran X,Y los puntos de intersección de PA y PB con C_2, respectivamente. Si $AB=4$, $PA=5$, $PB=7$ y $AX=16$, ¿cuánto mide XY?

Solución
Sea $\angle PAB=\alpha$. Entonces $\angle XAB=180^{\text{o}}-\alpha$. Como el cuadrilátero $AXYB$ es cícluco, tenemos que $\angle XYB=\alpha$. Los triángulos PAB y PYX son semejantes pues tienen dos ángulos iguales. Luego, $\dfrac{XY}{BA}=\dfrac{PX}{PB}$, de donde $XY=\dfrac{BA(PX)}{PB}=\dfrac{4(5+16)}{7}=12$

Problema 3
Para cada entero positivo k, sea S_k la progresión aritmética creciente de enteros cuyo primer término es 1 y cuya diferencia común es k. Por ejemplo, S_3 es la progresión 1, 4, 7, 10,.... ¿Para cuántos valores de k, S_k contiene el número 2008?

Solución
Cada término s_i de la sucesión S_k se puede expresar como $1+(i-1)k$ donde i es un entero positivo. Así que para hayar las sucesiones que contienen al número 2008 debemos cómo tienen que ser los s_i's que sean 2008. Si $s_i=1+(i-1)k=2008$ entonces $(i-1)k$= 2007 por lo que k tiene que ser un divisor de 2007, entonces k= 1, 3, 9, 223, 669, 2007, que son 6 valores.