

PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 5 (Nivel Inicial)

Problema 1

Sea $E(n)$ la suma de los dígitos pares de n . Por ejemplo, $E(5681) = 6 + 8 = 14$. ¿Cuál es el valor de $E(1) + E(2) + \dots + E(100)$?

Solución

Ya que $E(100) = E(00)$, el resultado es el mismo que de la suma: $E(00) + E(1) + E(2) + \dots + E(99)$ que es lo mismo que el de $E(0010203\dots99)$. Como hay 200 dígitos y cada dígito aparece 20 veces, la suma de los dígitos pares es $20(0+2+4+6+8) = 20(20) = 400$.

Problema 2

La sucesión $a_1 = 19, a_9 = 99$ y para $n \geq 3, a_n$ es el promedio de los primeros $n-1$ términos. Encuentre el valor de a_2, a_3 y a_4 .

Solución

Para $n \geq 3$ tenemos que:

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \text{ luego, } (n-1)a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}. \text{ Se sigue entonces que } a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{(n-1)a_n + a_n}{n} = a_n \text{ para } n \geq 3. \text{ Como } a_9 = 99 \text{ y } a_1 = 19, \text{ tenemos que } 99 = a_3 = \frac{19 + a_2}{2} \text{ y por lo tanto, } a_2 = 179. \text{ (La secuencia es } 19, 179, 99, 99, \dots).$$

Problema 3

Si se sabe que: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$, ¿cuál es el valor de :

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots?$$

Solución

Despejando tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots &= \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$