PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 2
(Nivel Inicial)

Problema 1
Demostrar que la bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$ del triángulo ΔABC y la bisectriz externa de ese mismo ángulo forman un ángulo de 90º

Solución
Sabemos que la bisectríz interna del ángulo $\angle BAC$ divide al mismo en dos ángulos de la misma medida y lo mismo ocurre con su ángulo externo y la bisectriz respectiva. Llamemos a los dos ángulos generados por la bisectriz interna α y los generados por la bisectriz externa β. Ahora: sabemos que el ángulo interno y el ángulo externo son suplementarios así que $2\alpha + 2\beta = 180^{o}$ por lo que entonces $\alpha + \beta = 90^{o}$

Problema 2
¿Cuántos divisores enteros positivos tiene el número 10^{10}?.

Solución
Sabemos que $10 = 2{\cdot}5$ por lo que $10^{10} = 2^{10}{\cdot}5^{10}$. Los divisores de este número serán de la forma $2^{i}{\cdot}5^{k}$ donde $0 \leq i \leq 10$ y $0 \leq k \leq 10$. Así que ambos i y k pueden tomar 11 valores distintos y el valor de uno no depende del otro por lo que, entonces, hay, en total, $11{\cdot}11 = 121$ divisores enteros positivos de 10^{10}.

Problema 3
Se quieren pintar las casillas de un tablero 4 x 4 de blanco y de negro, de tal manera que haya exactamente dos casillas negras y dos casillas blancas en cada renglón y en cada columna. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

Solución
Tenemos $\binom{4}{2} = 6$ maneras de pintar dos casillas negras en el primer renglón.
Dividimos en casos. 1. Las casillas negras del segundo renglón están en las mismas columnas que las casillas negras del primer renglón. En este caso, una vez pintadas las casillas del primer renglón, las casillas del segundo renglón quedan fijas y sólo hay una manera de pintar las casillas de los últimos dos renglones para que la configuración cumpla las condiciones del problema.

2. Ambas casillas negras del segundo renglón están en distintas columnas que las casillas negras del primer renglón. En este caso, una vez pintadas las casillas del primer renglón hay una única manera de pintar las casillas negras del segundo renglón. Tenemos entonces $\binom{4}{2} = 6$ maneras de pintar las casillas del tercer renglón, y el cuarto renglón queda determinado.

3. Exactamente una casilla negra del segundo renglón está en la misma columna que una casilla negra del primer renglón. En este caso, al pintar el segundo renglón hay dos maneras de elegir la columna común con una casilla pintada del primer renglón, y hay dos maneras más de pintar la casilla restante. es decir, hay cuatro maneras de pintar el segundo renglón. Independientemente de cómo se hayan pintado los primeros dos renglones, hay 2 maneras de pintar el tercer renglón y el cuarto renglón queda determinado. Luego, en este caso hay 4 x $2 = 8$ posibilidades.
Así que en total hay: $6 + 36 + 48 = 90$ coloraciones posibles.