PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 3
(Nivel Avanzado)

Problema 1

Si a y b son números reales tales que $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos a + \cos b = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, ¿Cuánto vale $\operatorname{sen} a + b$?

Solución

Si elevamos al cuadrado cada expresión y después sumamos las expresiones obtenidas, tenemos que:

$$(\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a) + (\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b) + 2(\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) = 2$$

Como $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ y $\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b = 1$, entonces:

$$\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = 0,$$

es decir, $\cos a - b = 0$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{6}}{2} &= (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)(\cos a + \cos b) \\ &= (\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a) + (\operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} b \cos a) \end{aligned}$$

es decir:

$$\operatorname{sen} a + b + \operatorname{sen} a + b \cos a - b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $\cos a - b = 0$, se sigue que $\operatorname{sen} a + b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Problema 2

Denotemos con S(n) a la suma de los primeros n enteros positivos. Diremos que un entero positivo n es fantástico si n y $S(n)$ son ambos cuadrados perfectos. Por ejemplo, el número 49 es fantástico, porque $49 = 7^2$ y $S(49) = 1 + 2 + ... + 49 = 1225 = 35^2$ son ambos cuadrados perfectos. encuentra un entero n ¿49 que sea fantástico.

Solución

Queremos encontrar un entero positivo k tal que $n = k^2$ y $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{k^2(k^2+1)}{2}$ sea un cuadrado perfecto. Como k^2 es un cuadrado, basta encontrar k tal que $\dfrac{k^2+1}{2} = m^2$ para algún entero positivo m. Es decir, queremos que $k^2 - 2m^2 = (k + m\sqrt{2})(k - m\sqrt{2}) = -1$. Como $S(49) = \dfrac{7^2(7^2+1)}{2} = 7^2(5^2)$, tenemos que:

$$7^2 - 2{*}5^2 = (7 + 5\sqrt{2})(7 - 5\sqrt{2}) = -1. \tag{3.1}$$

Además, es claro que:

$$(3{+}2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1$$

$$(3.2)$$

Multiplicando (3.1) y (3.2) tenemos que:
-1 = $(7{+}5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$
$= [(7+5\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})][(7-5\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})]$
$= (41+29\sqrt{2})(41-29\sqrt{2})$
$= 41^2 - 2 * 29^2$.

$$(3.3)$$

De aquí que $k = 41$ y $m = 29$ satisfacen la ecuación. Por lo tanto, $n = 41^2 = 1681$ es otro número fantástico. (Nótese que si multiplicamos (3.2) con (3.3) obtenemos nuevos valores de k y m y en consecuencia otro n´mero fantástico. Por lo tanto, podemos seguir con este procedimiento para generar una infinidad de números fantásticos.)

Problema 3
En algunas casillas de un tablero de 10x10 se coloca una ficha de manera que se cumpla la siguiente propiedad: para cada casilla que tiene una ficha, la cantidad de fichas colocadas en su misma fila debe ser mayor o igual a la cantidad de fichas colocadas en su misma columna. ¿Cuántas fichas puede haber en el tablero?

Solución
Es claro que una casilla se puede cubrir. Si cubrimos las casillas de una fila de una en una, cumplirán las condiciones. Luego, hemos cubierto de 1 a 10 casillas. Si cubrimos un cuadrado de 2 x 2, es claro que cumplirá las condiciones. Sobre una de las filas del cuadrado de 2 x 2, podemos cubrir de una en una todas las casillas de esa fila, y también cumplirán las condiciones. De igual manera se pueden cubrir las casilla de la otra fila del cuadrado 2 x 2. De esta forma, hemos cubierto de 4 a 20 casillas. Continuando de esta forma, utilizando cuadrados de 3 x 3, 4 x 4, ..., 9 x 9, podemos cubrir de 1 a 90 casillas. Ahora, supongamos que podemos cubrir de 91 a 99 casillas. Entonces, hay una fila con a lo más 9 casillas cubiertas. Pero también, por el principio de las casillas, hay una columna con 10 casillas cubiertas, y esto no puede ser. Por lo tanto, no se pueden cubrir de 91 a 99 casillas. Finalmente, es fácil ver que se puede cubrir toda la cuadrícula. Por lo tanto, sólo se puede cubrir de 1 a 90 casillas y toda la cuadrícula.