

PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 3 (Nivel Avanzado)

Problema 1

¿Cuántos divisores tiene 2008^{2008} que son cuadrados perfectos?

Solución

$$2008 = 2^3 * 251$$

$$2008^{2008} = 2^{6024} * 251^{2008}$$

Cualquier divisor que sea un cuadrado perfecto de 2008^{2008} será de la forma $2^{2q} * 251^{2k}$ con $0 \leq q \leq 3012$ y $0 \leq k \leq 1014$ por lo que q puede tomar 3013 valores y k 1015 valores así que en total hay $1015 * 3013$ divisores que son cuadrados.

Problema 2

Un poliedro convexo P tiene 26 vértices, 60 aristas y 36 caras. De las 36 caras, 24 son triángulos y 12 son cuadriláteros. Una “diagonal espacial” es una recta que une dos vértices no adyacentes que no pertenecen a la misma cara. ¿Cuántas diagonales espaciales tiene P ?

Solución

En total tenemos $\binom{26}{2} = 325$ rectas que unen vértices de P . De estas rectas, algunas son aristas, otras son diagonales de cuadriláteros y otras son diagonales espaciales. Como cada cuadrilátero tiene 2 diagonales, tenemos $12(2) = 24$ diagonales de cuadriláteros. Por lo tanto el número de diagonales espaciales de P es $325 - 60 - 24 = 241$

Problema 3

Dos circunferencias C_1 y C_2 tienen una cuerda común AB . Se elige un punto P en C_1 de manera que quede afuera de C_2 . Sean X, Y los puntos de intersección de PA y PB con C_2 , respectivamente. Si $AB = 4, PA = 5, PB = 7$ y $AX = 16$, ¿cuánto mide XY ?

Solución

Sea $\angle PAB = \alpha$. Entonces $\angle XAB = 180^\circ - \alpha$. Como el cuadrilátero $AXYB$ es cíclico, tenemos que $\angle XYB = \alpha$. Los triángulos PAB y PYX son semejantes pues tienen dos ángulos iguales. Luego, $\frac{XY}{BA} = \frac{PX}{PB}$, de donde $XY = \frac{BA(PX)}{PB} = \frac{4(5 + 16)}{7} = 12$