PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 2
(Nivel Avanzado)

Problema 1
La ecuación $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ tiene tres soluciones reales a, byc. ¿Cuál es el valor de $a^5 + b^5 + c^5$?

Solución
Como a, b y c con soluciones de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$, entonces $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$, de donde:

$$a + b + c = 6$$
$$ab + ac + bc = 5$$
$$abc = 1$$

Pero también tenemos que:

$$a^3 - 6a^2 + 5a - 1 = 0$$
$$b^3 - 6b^2 + 5b - 1 = 0$$
$$c^3 - 6c^2 + 5c - 1 = 0$$

es decir:

$$a^3 = 6a^2 - 5a + 1(1)$$
$$b^3 = 6b^2 - 5b + 1(2)$$
$$c^3 = 6c^2 - 5c + 1(3)$$

Sumando las tres ecuaciones tenemos que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 - 5a - 5b - 5c + 3 = 6(a^2 + b^2 + c^2) - 5(a + b + c) + 3$$

Como $a + b + c = 6$, si conociéramos el valor de $a^2 + b^2 + c^2$, conoceríamos el valor de $a^3 + b^3 + c^3$. Como:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$
$$6^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(5)$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 26,$$

se sigue que $a^3 + b^3 + c^3 = 6(26) - 5(6) + 3 = 129$.

Por otra parte, si multiplicamos cada termino de la ecuación (1) por a, cada término de la ecuación (2) por b y cada término de la ecuación (3) por c obtenemos:

$$a^4 = 6a^3 - 5a^2 + a(4)$$
$$b^4 = 6b^3 - 5b^2 + b(5)$$
$$c^4 = 6c^3 - 5c^2 + c(6)$$

Sumando término a término, tenemos que:

$$a^4 + b^4 + c^4 = 6(a^3 + b^3 + c^3) - 5(a^2 + b^2 + c^2) + a + b + c$$
$$=6(129) - 5(26) + 6$$
$$= 650$$

Ahora repetimos el procedimiento multiplicando cada término de la ecuación (4) por a, de la ecuación (5) por b y de la ecuación (6) por c, y obtenemos: $a^5 + b^5 + c^5 = 6(a^4 + b^4 + c^4) - 5(a^3 + b^3 + c^3) + a^2 + b^2 + c^2$ $= 6(650)$ - $5(129)$ + 26 $= 3281$

Por lo tanto, $a^5 + b^5 + c^5 = 3281$

Problema 2
Sea ABC un triángulo acutángulo con $\angle BAC = 60^{o}$ y AB ¿AC. Sean I el incentro y H el ortocentro del triángulo ABC. Muestre que

$$2\angle AHI = 3\angle ABC.$$

Solución

Sea D el punto de intersección de las rectas AH y BC. Sea K el punto de intersección del circuncírculo O del triángulo ABC con la recta AH. Consideremos la recta por I perpendicular a BC y supongamos que intersecta a BC y al menor de los dos arcos entre B y C (del circuncírculo O) en los puntos E y N, respectivamente. Tenemos que:

$$\angle BIC = 180^{o} - (\angle IBC + \angle ICB) = 180 - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$
$$= 90 + \frac{1}{2}\angle BAC = 120$$

y también $\angle BNC = 180 - \angle BAC = 120 = \angle BIC$. Como IN y BC son perpendiculares, el cuadrilátero $BICN$ es un trapezoide y por lo tanto $IE = EN$. Ahora, ya que H es el ortocentro del triángulo ABC, tenemos que $HD = DK$. También, como ED y ED, tenemos que $IHKN$ es un trapecio isósceles con $IH = NK$. Luego, $\angle AHI = 180 - \angle IHK = 180 - \angle AKN = \angle ABN$. Como $IE = EN$ y BE, los triángulos IBE y NBE son congruentes. Luego, $\angle NBE = \angle IBE = \angle IBC = \angle IBA = \frac{1}{2}\angle ABC$ y por lo tanto $\angle AHI = \angle ABN = \frac{3}{2}\angle ABC$

Problema 3
Determina el máximo común divisor de los números:

$$3^3 - 3, 5^5 - 5, 7^7 - 7, ..., 2007^{2007} - 2007$$

Solución

Como el más pequeño de los números es $3^3 - 3$= 24, el máximo común divisor es a lo más 24. Cada número es de la forma $n^n - n$ con n impar y mayor que 1. Sea $n = 2k + 1$. Entonces: $n^n - n = n((n^2)^k - 1) = n(n^2 - 1)(n^{2k-2} + n^{2k-4} + ... + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^{2k-2} + n^{2k-4} + ... + 1)$.

Como alguno de los números n, $n - 1$ o $n + 1$ es divisible entre 3, entonces $n(n - 1)(n + 1)$ es divisible entre 3. Además, como $n - 1$ y $n + 1$ son ambos pares y uno es múltiplo de 4. Por lo tanto, todos es´tos números son divisibles por 24 por lo que el máximo común divisor es 24.