PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N$^\circ$ 2
(Nivel Avanzado)

Problema 1
Si x $= \dfrac{4}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[16]{5}+1)}$, encuentra el valor de $(x+1)^{48}$

Solución
Usando el teorema del binomio, tenemos que $(x+1)^{48} = \sum_{k=0}^{48}\binom{48}{k}x^{48}$. Calculemos entonces x^{48}.
Nuevamente, por el teorema del binomio tenemos que:
$(\sqrt{5}+1)^{48} = \sum_{j=1}^{48}\binom{48}{j}(\sqrt{5})^{48} = \sum_{j=1}^{48}\binom{48}{j}5^{24} = 5^{24} * 2^{48}$.
Análogamente, tenemos que:
$(\sqrt[4]{5}+1)^{48} = \sum_{j=1}^{48}\binom{48}{j}(\sqrt[4]{5})^{48} = \sum_{j=1}^{48}\binom{48}{j}5^{12} = 5^{12} * 2^{48}$.
$(\sqrt[8]{5}+1)^{48} = \sum_{j=1}^{48}\binom{48}{j}(\sqrt[8]{5})^{48} = \sum_{j=1}^{48}\binom{48}{j}5^{6} = 5^{6} * 2^{48}$.
$(\sqrt[16]{5}+1)^{48} = \sum_{j=1}^{48}\binom{48}{j}(\sqrt[16]{5})^{48} = \sum_{j=1}^{48}\binom{48}{j}5^{4} = 5^{12} * 2^{48}$.

Problema 2
Demostrar las fórmulas de área del triángulo: A=$\dfrac{absin\delta}{2}$, donde a y b son los lados de un triángulo y δ es el ángulo comprendido entre ellos, y A=$\dfrac{abc}{4R}$ donde a, b, y c son los lados de un triángulo y R es el circuncírculo del mismo.

Solución
Sea h la altura desde el vértice A al lado opuesto. Sabemos que $sin\delta = \dfrac{h}{b}$ por lo que $h = sin\delta * b$ por lo que entonces el área del triángulo es $= \dfrac{absin\delta}{2}$. Ahora, por la ley del seno sabemos que $sin\delta = \dfrac{c}{2R}$ por lo que el área del triángulo es $\dfrac{abc}{4R}$.

Problema 3
Sea P un polígono regular de $2m+1$ lados y sea C su centro. ¿Cuántos triángulos cuyos vértices coinciden con vértices de P contienen a C en su interior?

Solución
Diremos que un triángulo es bueno si contiene a C. Sea v un vértice fijo de P y numeremos los restantes vértices (empezando a la derecha de v) por $v_1, v_2, ..., v_2m$. Procedemos a contar cuántos triángulos buenos tienen a v como uno de sus vértices. Para esto contaremos primero aquéllos que tienen al segmento vv_1 como uno de sus lados. Sean l_1 y l los ejes de simetría de P por v_1 y v, respectivamente. Es claro que el vértice v_{m+1} es el único que forma un triángulo bueno y también es el único vértice que está en la región de P delimitada por l y l_1 y que no intersecta al segmento vv_1.De manera general, al considerar el vértice v_k, $1 \leq k \leq m$, los únicos triángulos buenos que tienen al segmento vv_k como uno de sus lados, son precisamente aquellos cuyo tercer vértice cae en la región de P delimitada por l y l_k y que no intersecta al segmento vv_k. Es fácil ver que hay exactamente k de ellos. Como cada triánglo bueno contiene a v tiene exactamente un vértice a cada lado de l, tenemos que el número de triángulos buenos que contienen a v es: $\dfrac{m(m+1)}{2}$ y por lo tanto, al variar

v obtenemos un total de: $\dfrac{m(m+1)}{2}\dfrac{2m+1}{3} = \dfrac{(2m+1)m(m+1)}{6}$ triángulos buenos (note que al variar v cada triángulo se cuenta tres veces, por lo que es necesario dividir entre 3).