PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 1
(Nivel Avanzado)

Problema 1
¿De cuántas maneras distintas pueden llegar seis caballos de carrera a la meta suponiendo que pueden haber empates?

Solución
Las diferentes maneras de separar el entero 6 en enteros positivos que sumen 6 son las diferentes maneras en las que pueden llegar los caballos. Estas maneras son:
a– 6
b– 5 + 1
c– 4 + 2
d– 3 + 3
e– 4 + 1 + 1
f– 3 + 2 + 1
g– 2 + 2 + 2
h– 3 + 1 + 1 + 1
i– 2 + 2 + 1 + 1
j– 2 + 1 + 1 + 1 + 1
k– 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Donde cada número separado por un + simboliza la cantidad de caballos que empatan, por ejemplo en el caso f empatan, 3 caballos, 2 y luego uno llega solo. Ahora, la cantidad de maneras diferentes de que lleguen los distintos caballos en cada una de las maneras es:
a– 1
b– $\binom{6}{5} * 1 * 2$=12
c– $\binom{6}{4} * 2$= 30
d– $\binom{6}{3} = 20$
e– $\binom{6}{4}\binom{2}{1} * 3$=90
f– $\binom{6}{3}\binom{3}{2} * 6 = 360$
g– $\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$
h– $\binom{6}{3}\binom{3}{1}\binom{2}{1} * 4$= 480
i– $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1} * \binom{4}{2} = 1080$
j– $\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1} * 5 = 1800$
k– 6!= 720

Que en total son: 4683 diferentes posibilidades.

Problema 2
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $AB = BC = CD$, $AC \neq BD$ y E el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero. Probar que $AE = DE$ si y sólo $\angle BAD + \angle ADC = 120^{o}$.

Solución
Primero probamos el lado de $AE = DE \Rightarrow \angle BAD + \angle ADC = 120^\circ$ quedaría comprobado lo que queremos.
F es la reflección de C sobre AB. Tenemos que $\angle FAD = \angle EAD = \angle EDA$ por lo que $AF//BD$. Pero $DF = CD = AB$ y AF no es igual BD por lo que $ABDF$ es un trapecio isósceles.

Entonces $\angle ABD + \angle ACD = \angle ABD + \angle AFD = 180$
$\angle EAD + \angle EDA = \angle BEA = \angle DBC + \angle ACB$
Por lo que $\angle BAC + \angle CDA = 2 * (\angle DBC + \angle ACB)$
$\angle BAD + \angle CDA = 360 - \angle ABC - \angle BCD = 180 - \angle DBC - \angle ACB$. Se concluye de (1) y (2) que $\angle BAD + \angle CDA = 120$

Ahora el lado de$\angle BAD + \angle ADC = 120° \Rightarrow AE = DE$:
AB y CD se intersectan en M y tenemos que $= 60$.
$\angle AEC = °80 - \angle BEA$ (3)
$\angle AEC = \angle AMD + \angle MAC + \angle MDB = \angle 60 + \angle DBC + \angle ACB = 60 + \angle BEA(4)$
De (3) y (4) concluimos que: $\angle BEA = 60 = \angle AMD$ por lo que B, M, C, E es un cuadrilátero cíclico así que: $\angle CDE = \angle CBE = \angle CME$.
Por lo que el triángulo MED es isósceles y entonces $ED = EM$. Análogamente $EA = EM$ y entonces $EA = ED$.

Problema 3
Probar que si a,b y c son números reales positivos cualesquiera, entonces se cumple que:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Solución
Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a \leq b \leq c$por lo que entonces $a+b \leq a+c \leq b+c$ y también $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{a+b}$. Ahora, por la desigualdad de reordenamiento sabemos que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}$$
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b}$$

Sumando ambas desigualdades tenemos que:

$$2(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}) \geq \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{a+c} + \frac{a+b}{a+b}$$
$$2(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}) \geq 3$$
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$