

## PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 7 (Nivel Avanzado)

### Problema 1

Encontrar todas las funciones  $f$  de los reales positivos en los reales positivos que satisfagan las siguientes condiciones:

- (i)  $f[xf(y)] = yf(x)$  para todos  $x, y$  positivo.
- (ii)  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$

### Problema 2

$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, n > 1$ . Probar que  $2^k | a_n \Leftrightarrow 2^k | n$

### Problema 3

Se comienza con  $n \geq 12$  enteros positivos consecutivos.  $A$  y  $B$  alternadamente toman un entero, hasta que sólo quedan dos enteros  $a$  y  $b$ .  $A$  gana si  $\text{mcd}(a, b) = 1$ , y  $B$  gana si  $\text{mcd}(a, b) > 1$ . Quién tiene la estrategia ganadora?