

## PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 6 (Nivel Avanzado)

### Problema 1

Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo con ángulo recto en  $A$ , tal que  $AB < AC$ . Sea  $M$  el punto medio de  $BC$  y  $D$  la intersección de  $AC$  con la perpendicular a  $BC$  que pasa por  $M$ . Sea  $E$  la intersección de la paralela a  $AC$  que pasa por  $M$  con la perpendicular a  $BD$  que pasa por  $B$ . Demuestra que los triángulos  $AEM$  y  $MCA$  son semejantes si y sólo si  $\angle ABC = 60^\circ$

### Problema 2

Sea  $N$  un entero mayor que 1. En cierta baraja de  $N^3$  cartas, cada carta está pintada de uno de  $N$  colores distintos, tiene dibujada una de  $N$  posibles figuras y tiene escrito un número entero del 1 al  $N$  (no hay dos cartas idénticas). Una colección de cartas de la baraja se llama *completa* si tiene cartas de todos los colores, o si entre sus cartas aparecen todas las figuras o todos los números. ¿Cuántas colecciones no completas tienen la propiedad de que, al añadir cualquier otra carta de la baraja, ya se vuelven completas?

### Problema 3

Demuestra que para cada entero  $n \geq 0$ , el número  $7^{7^n} + 1$  es el producto de al menos  $2n + 3$  números primos no necesariamente distintos.