

PROBLEMAS DE ENTRENAMIENTO SEMANA N° 10 (Nivel Avanzado)

Problema 1 Determine cuantos números naturales menores que 1998 tienen un número ímpar de divisores positivos.

Problema 2

Suponga que deseamos saber de cual ventana de un edificio de 36 pisos es seguro lanzar huevos para abajo, de modo que los huevos ño se quiebren o ensucien el piso. Para tal, admitimos que:

- Un huevo que sobrevive a una caída puede ser usado nuevamente.
- Un huevo quebrado debe ser descartado.
- El efecto de la caída es el mismo para todos los huevos.
- Si un huevo se quiebra cuando lanzado de cierta ventana entonces se quebrará si lanzado de una altura superior.
- Si un huevo sobrevive a una caída entonces sobrevivirá a una caída menor.
- No se sabe si de la ventana del primer piso los huevos se quebrarab y no se sabe si de la ventana del ultimo piso los huevos se quebraran.

Si tneemos apenas 1 huevo y queremos tener certeza de obtener un resultado correcto, el experimento debe ser guiado apenas por un único camino: lance el huevo por la ventana del primero piso; si no se quiebra, lance el huevo por la ventana del segundo piso. Continúe hasta que el huevo se quiebre. En el peor de los casos, este método necesitará de 36 lanzamientos para ser concluído. Suponga que 2 huevos están disponibles. Cual es el menor número de lanzamientos de huevos necesarios para garantizar todos los casos?

Problema 3

Considere cinco puntos cualesquiera P_1, P_2, \dots, P_5 en el interior de un cuadrado de lado 1. Muestre que por lo menos una de las distancias d_{ij} entre P_i e P_j es menor que $\sqrt{2} / 2$.

Problema 4

Muestre que, dados 5 puntos del plano en posición general (esto es tres puntos cualesquiera nunca estan en línea recta), hay 4 que forman un cuadrilátero convexo.

Problema 5

Dos discos A e B son divididos en $2n$ sectores iguales. En el disco A , n sectores son pintados de azul y n de rojo. En el disco B , los sectores son pintados de azul o rojo de forma completamente arbitraria. Muestre que A y B pueden ser superpuestos de modo que por lo menos n sectores tengan colores coincidentes.