IX OMCC, Venezuela, 2007

Problemas propuestos

1. La OMCC es una competencia anual de matemáticas. En el 2007 se lleva a cabo la novena olimpiada. ¿Para cuáles enteros positivos n se cumple que n divide al año en que se realiza la n-ésima olimpiada?

2. Sea ABC un triángulo, D y E puntos en los lados AC y AB, respectivamente, tales que las rectas BD, CE y la la bisectriz que parte de A concurren en un punto P interior al triángulo. Demuestre que hay una circunferencia tangente a los cuatro lados del cuadrilátero $ADPE$ si y sólo si $AB = AC$.

3. Sea S un conjunto finito de números enteros. Suponga que para cualquier par de elementos p, q de S, con $p \neq q$, hay elementos a, b, c de S, no necesariamente diferentes entre sí, con $a \neq 0$, de manera que el polinomio $F(x) = ax^2 + bx + c$ cumple que $F(p) = F(q) = 0$. Determine el máximo número de elementos que puede tener el conjunto S.

4. Los habitantes de cierta isla hablan un idioma en el cual todas las palabras se pueden escribir con las siguientes letras: a, b, c, d, e, f y g. Se dice que una palabra *produce* a otra si se puede llegar de la primera a la segunda aplicando una o más veces cualquiera de las siguientes reglas:

1. Cambiar una letra por dos letras de acuerdo a las siguientes regla:

$$a \to bc,\ b \to cd,\ c \to de,\ d \to ef,\ e \to fg,\ f \to ga,\ g \to ab.$$

2. Si se encuentran dos letras iguales rodeando a otra, ellas se pueden quitar. Ejemplo: $dfd \to f$.

Por ejemplo, $cafcd$ produce a $bfcd$, porque

$$cafcd \to cbcfcd \to bfcd.$$

Demuestre que en esta isla toda palabra produce a cualquier otra palabra.

5. Dados dos números enteros no negativos m, n, con $m > n$, se dirá que m *termina* en n si es posible borrar algunos dígitos de izquierda a derecha de m

para obtener n. Por ejemplo, 329 termina en 9 y en 29, únicamente. Determine cuántos números de tres dígitos terminan en el producto de sus dígitos.

6. Desde un punto P exterior a una circunferencia S se trazan tangentes que la tocan en A y B. Sea M el punto medio de AB. La mediatriz de AM corta a S en C (interior al ΔABP), la recta AC corta a la recta PM en G, y la recta PM corta a S en el punto D exterior al triángulo ΔABP. Si $BD || AC$, demuestre que G es el punto donde concurren las medianas del ΔABP.

Soluciones

1. Sea $a(n)$ el año en que se realiza la n-ésima olimpiada. Entonces se tiene que $a(n) = 1998 + n$, por lo que n divide a $a(n)$ si y sólo si n divide a 1998. Por lo tanto los n que cumplen con la condición son los divisores de 1998, y como $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ se tienen $(1 + 1)(3 + 1)(1 + 1) = 16$ valores posibles de n: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74, 111, 222, 333, 666, 999 y 1998.

2. En primer lugar, supóngase que $ADPE$ es circunscribible. Sea O el centro del círculo inscrito en $ADBE$. Ya que este punto O es equidistante de AE y AD, debe pertenecer a la bisectriz de $\angle DAE$, es decir, a la línea AP. De esta forma, PO será entonces la bisectriz del ángulo $\angle DPE$, de donde los triángulos APD y APE son congruentes. Ahora, nótese que los triángulos APB y APC comparten el lado AP, que $\measuredangle BAP = \measuredangle CAP$ por ser AP bisectris de $\angle DAE$ y que $\measuredangle BPA = 180° - \measuredangle DPA = 180° - \measuredangle EPA = \measuredangle CPA$. Así, los triángulos APB y APC son congruentes, de donde $AB = AC$.

Ahora, suponiendo que $AB = AC$, el triángulo tendrá como eje de simetría la bisectriz AP, lo que permite afirmar inmediatamente que los triángulos APD y APE son congruentes, por lo que $AE + DP = AD + EP$, la condición básica sobre las longitudes de los lados de un cuadrilátero circunscribible.

3. Se demostrará que el máximo número de elementos que puede tener S es tres. En primer lugar, se mostrará un conjunto de tres elementos con la propiedad pedida, el conjunto $S = \{-1, 0, 1\}$. Para esto, nótese que el polinomio $1x^2+0x+(-1)$ tiene coeficientes en S y raíces -1, 1; el polinomio $1x^2+(-1)x+0$ tiene coeficientes en S raíces 0, 1; el polinomio $1x^2 + 1x + 0$ tiene coeficientes en S y raíces -1, 0. Así, el conjunto S dado cumple la condición.

En segundo lugar, se mostrará que el conjunto no puede tener más de tres elementos. Procediendo por contradicción, supóngase que el conjunto S tiene al menos dos elementos con valor absoluto mayor que 1, sean p, q los dos elementos con mayor valor absoluto en el conjunto (con $|p| \geq |q|$). Según las condiciones del problema, existen A, B, C en S, con $A \neq 0$, tales que el polinomio Ax^2+Bx+C tiene raíces p, q. Según las fórmulas de Vieta, debe cumplirse que $Apq = C$, de donde $|C| = |A||p||q| \geq 2|p| > |p|$, lo que contradice la hipótesis de tener a p, q como los elementos con mayor valor absoluto en el conjunto. De esta forma, solamente podría encontrarse un elemento en el conjunto con valor absoluto mayor que 1, de donde la mayor cantidad de elementos que podría tener el conjunto será cuatro, siento estos -1, 0, 1, n para algún n entero con valor absoluto mayor que 1. Si n es positivo, el coeficiente del término lineal en el polinomio que tenga raíces 1 y n debe tener valor absoluto mayor o igual que $n+1$, contradicción. Lo mismo sucederá si n es negativo, considerando el coeficiente del término lineal en el polinomio con raíces -1 y n. De esta forma, no es posible que el conjunto buscado tenga cuatro elementos. Se concluye así que el máximo posible es tres elementos.

4. Usaremos la notación $\to\to$ para indicar que una palabra produce a otra. Observemos que $a \to bc \to cdc \to d$ y por lo tanto $a \to\to d$. Análogamente $d \to\to g$, $g \to\to c$, $c \to\to f$, $f \to\to b$, $b \to\to e$ y $e \to\to a$. Por lo tanto, cada letra produce a cualquier otra. Esto significa que cualquier palabra de n letras, cambiando ordenadamente cada una de sus letras en a, produce la palabra formada por n letras a. Suponiendo que n es impar, aplicando la segunda regla a la palabra original, podemos llevarla fácilmente a la palabra formada por una sola a. Si n es par, entonces es claro que la palabra original produce la palabra aa, eliminando letras de dos en dos. Pero como a produce g, se tiene $aa \to\to ga \to aba \to b \to\to a$.

Ahora observemos que las reglas dadas son reversibles, lo cual asegurará que la palabra a produce cualquier otra palabra. En efecto,

$$bc \to\to bg \to bab \to a,$$

y análogamente para las demás instancias de la primera regla.

Además, $f \to\to b \to cd \to ded \to\to dfd$ y análogamente para las demás instancias de la segunda regla.

5. Nótese que si el número termina en 0, entonces el producto de sus dígitos es también 0 y por lo tanto cumple la condición de terminar en el producto de sus dígitos. De esta forma, todos los números de tres dígitos que terminan en 0 cumplen la condición, 90 números en total.

Supóngase ahora que el número buscado es de la forma $\overline{abc}$, con $c \neq 0$. Se busca que $abc = c$ o que $abc = \overline{bc}$.

En el primer caso, $abc = c$, cancelando c en los dos lados (que es posible porque $c \neq 0$) se tiene $ab = 1$, de donde $a = b = 1$. En total existen diez números de tres dígitos con $a = b = 1$, pero uno de ellos ya fue contado (110), por lo que solamente se agregan 9 posibles números que cumplen la condición.

En el segundo caso, $abc = \overline{bc}$ se puede escribir como $abc = 10b + c$, de donde se tiene automáticamente que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, además de $b \mid 10b + c$ que implica $b \mid c$. En la misma forma se puede obtener $c \mid 10b$, por lo que las posibles parejas (b, c) se reducen a (1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9). De estas parejas, los únicos números que se pueden construir según las condiciones del problema son 612, 315, 324 y 236. Se obtiene de esta forma 4 posibilidades más.

Sumando todas las cantidades obtenidas, el total de números de tres dígitos que terminan en el producto de sus dígitos es $90 + 9 + 4 = 103$.

6. El ΔAMG es rectángulo, por lo que la mediatriz de AM corta a la hipotenusa en el circuncentro C del triángulo, por lo que $CA = CG$. Por simetría, si E es la intersección de BG con S, se tendrá que $EG = EB = AC$.

Como $AG||BD$ y M es punto medio de AB, se observa que los triángulos rectángulos ΔAMG y ΔBMD son congruentes, por lo que $AG = BD$, y por simetría $AG = BG$, así $BD = BG$. Si F es la intersección de AG con BP, usando nuevamente el paralelismo anterior $\angle BGF = \angle DBE$, y por ángulo semi-inscrito $\angle FBG = \angle BDE$. Luego, por criterio ALA , los triángulos ΔBDE y ΔBGF son congruentes, por lo que $GF = BE$.

Así, en el ΔABP, se tiene que G es punto sobre la mediana PM tal que $AG = 2GF$, se puede concluir casi inmediatamente que G es en efecto el baricentro, una manera de argumentarlo es por contradicción, suponiendo G' (distinto de G) el baricentro de ΔABP, ubicado sobre PM y tal que $AG' = 2G'F'$ (F' la intersección de AG' con BP), de donde se concluiría por el recíproco de Thales que $GG'||FF'$, es decir $MP||BP$, lo cual es contradictorio. Otra manera de argumentarlo es aplicando Menelao al ΔABF con los puntos alineados P, G y M, quedaría:

$$1 = \frac{BP}{PF}\frac{FG}{GA}\frac{AM}{MB} = \frac{BP}{2PF}.$$

Por lo que F es punto medio de BP y de allí el resultado.