

## Afiche Los Favoritos 2011 – Respuestas

### Problemas de la Prueba Preliminar (Canguro)

#### Primer Año:

1. E. Quedan 4 cubitos con 3 caras pintadas de anaranjado, a saber los que están en los vértices de la cara opuesta a la que no se pintó.
2. D. Visualice cómo cualquiera de los cuatro “nudos” restantes se puede desenredar.

#### Segundo Año:

3. C. El giro lleva el cuadrado azul a la izquierda del amarillo y el rojo debajo del azul.
4. B. Como los dados de los extremos son idénticos, la cara derecha del dado de la izquierda es 4, y la cara izquierda del dado de la derecha es  $7 - 4 = 3$ . Las caras opuestas a las dos caras visibles del dado central son 4 y 1, luego sus caras laterales son 2 y 5. La suma de las caras pegadas es, por lo tanto,  $4 + 3 + 2 + 5 = 14$ .

#### Tercer Año:

5. C. Obviamente no se puede lograr con una ni con dos rectas. Con tres rectas se puede dividir el plano en 4 regiones (tres paralelas), 6 (2 paralelas y una transversal, o 3 concurrentes) ó 7 (3 en posición genérica) pero nunca en 5. Con 4 rectas paralelas se logran las 5 regiones.
6. A. La suma de los números en las intersecciones debe ser  $5 \cdot 11 - 45 = 10$ , por lo tanto esos números deben ser 1, 2, 3 y 4 (en algún orden). El 9 debe ir en un extremo, si no al sumarle dos números en las intersecciones un círculo pasaría de 11. Supongamos entonces que la secuencia de números de izquierda a derecha comienza con 9, 2. El 8 debe ir a continuación (9, 2, 8, 1, ...) o en el extremo derecho (9, 2, ..., 3, 8). La primera posibilidad se descarta pues entonces el 3 y el 4 estarían dentro de un mismo círculo, y debería repetirse el 4. La segunda posibilidad debe ser de la forma 9, 2,  $x$ , 4,  $y$ , 1,  $z$ , 3, 8, que sólo se puede completar como 9, 2, 5, 4, 6, 1, 7, 3, 8.

#### Cuarto Año:

7. C. Sea  $O$  el centro de las circunferencias y  $C$  el punto de tangencia de la cuerda  $AB$  con la circunferencia menor. Entonces, por Pitágoras,  $OB^2 - OC^2 = BC^2 = 8^2 = 64$  y el área anaranjada es  $OB^2\pi - OC^2\pi = (OB^2 - OC^2)\pi = 64\pi$ .
8. A.  $AC$  es la diagonal de un paralelogramo compuesto por 12 triangulitos,  $AB$  es la diagonal de un paralelogramo compuesto por 6 triangulitos y  $BC$  es la diagonal de un paralelogramo compuesto por 4 triangulitos. El área sombreada es la unión de la mitad de cada uno de los paralelogramos mencionados, por lo tanto su área  $6 + 3 + 2 = 11 \text{ cm}^2$ .

**Quinto Año:**

9. D. La suma de azules y verdes no puede ser superior a 3 (ya que en cada extracción hay al menos dos rojas). Tampoco puede haber una azul y dos verdes, o dos verdes y una azul, pues entonces se podrían extraer 5 bolas que no contengan tres de un mismo color. La única posibilidad que queda es que haya una azul y una verde.

10. E. Sustituyendo  $x$  por  $2010/x$  en

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$$

resulta

$$2f\left(\frac{2010}{x}\right) + 3f(x) = 5\frac{2010}{x}.$$

Multiplicando la primera igualdad por 2 y la segunda por 3, y restando miembro a miembro la primera de la segunda, resulta

$$5f(x) = 15\frac{2010}{x} - 10x,$$

de donde

$$f(x) = \frac{6030}{x} - 2x$$

y en particular  $f(6) = 6030/6 - 2 \cdot 6 = 1005 - 12 = 993$ .

## Problemas de la Prueba Regional

**Primer Año:**

11. Los cuadrados perfectos de dos cifras son 16, 25, 36, 49, 64 y 81. Si el número comienza con 1 sólo puede seguir con 6 (16), luego con 4 (164), luego 9 (1649) y se acaban. Si comienza con 2, 25 y no se puede seguir. Del mismo modo comenzando con 3 se obtienen 36, 364 y 3649. Con 4 sólo 49, con 5 no hay ninguno, con 6: 64 y 649, con 7 no hay y con 8: 81, 816, 8164 y 81649. La lista completa es

16, 164, 1649, 25, 36, 364, 3649, 49, 64, 649, 81, 816, 8164 y 81649.

**Segundo Año**

12. Como  $125 = 5^3$  se tiene  $N = 2^{2010} \cdot 5^{3 \cdot 671} = 2^{2010} \cdot 5^{2013} = 5^3 \cdot 10^{2010}$ . Por lo tanto  $N$  se escribe como 125 seguido de 2010 ceros. Su número de cifras es 2013 y la suma de todas ellas es 8.

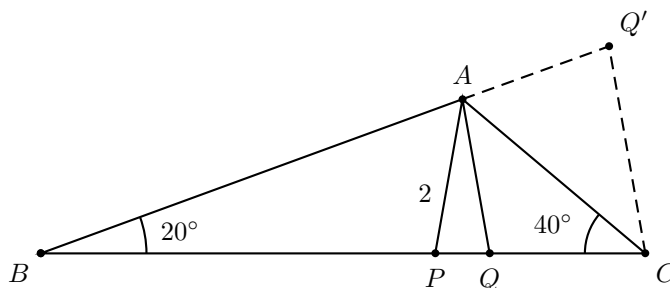
**Tercer Año:**

13. El número de bupis al final de cada uno de los primeros doce días es: 134, 104, 148, 118, 176, 146, 116, 172, 142, 112, 164, 134. A partir de este punto la sucesión se repite periódicamente, con período 11. Como  $1000 = 90 \cdot 11 + 10$ , resulta entonces que al finalizar el día 1000 habrá tantos bupis como al fin del día 10, es decir 112.

**Cuarto Año:**

14. Si uno de los dos, en su turno, dice un número del 34 al 99, pierde pues el siguiente en jugar gana diciendo el triple. Entonces el que logre decir un número del 17 al 33 gana, pues obliga al otro a responder un número del 34 al 99. El que diga un número del 6 al 16 pierde, pues el siguiente puede responder con un número del 18 al 32. Entonces Ana puede ganar comenzando con 3, 4 ó 5, pues esto obliga a Bernardo a responder con un número entre 6 y 15 (Si Ana dice 1 ó 2 pierde, pues Bernardo responde 3 ó 4, respectivamente).

15. Sea  $P$  el pie de la bisectriz y sea  $Q$  el punto en  $BC$  tal que  $BQ = BA$ . Entonces  $BAQ$  es isósceles y  $\angle BAQ = \angle BQA = (180^\circ - 20^\circ)/2 = 80^\circ$ . Como  $\angle APC = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$  entonces  $PAQ$  es isósceles y  $AQ = AP = 2$ . Como  $\angle QAC = \angle BAC - \angle BAQ = 120^\circ - 80^\circ = 40^\circ$ ,  $QAC$  también es isósceles y  $QC = AQ = 2$ . Por lo tanto  $BC - AB = QC = 2$ .



Alternativamente se puede tomar  $Q'$  en la prolongación de  $BA$  de tal modo que  $BQ' = BC$ , probar que  $AQ' = AP = 2$  y por lo tanto  $BC - AB = AQ' = 2$ .

**Quinto Año:**

16. (a) 
$$\frac{n^2}{(n-1)(n+1)} = \frac{n^2}{n^2-1} = 1 + \frac{1}{n^2-1} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

(Por supuesto que también es válido comenzar por la expresión de la derecha y llegar a la de la izquierda).

(b) La suma pedida es igual a

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2009} - \frac{1}{2011} \right) \\ &= 2009 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2010} + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2011} \right) \\ &= 2009 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \right) \\ &= 2009 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \right) = 2009 + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{4021}{2010 \cdot 2011} \right) \\ &= 2009 + \frac{1}{2} \left( \frac{3 \cdot 1005 \cdot 2011 - 4021}{2010 \cdot 2011} \right) = 2009 + \frac{3029572}{4042110} = 2009 + \frac{1514786}{2021055}. \end{aligned}$$

17. Si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son las proyecciones ortogonales de  $N$  sobre los lados  $JK$ ,  $KL$ ,  $LM$  y  $MJ$ , respectivamente, entonces  $MC = DN = NA = BK$ . Como los triángulos  $NBK$  y  $MNC$  son semejantes se tiene  $BK/NB = CN/MC$ , es decir  $MC/8 = 1/MC$ , de donde  $MC^2 = 8$ ,  $MC = 2\sqrt{2}$  y  $ML = MC + CL = 2\sqrt{2} + 8$ .

## Problemas de la Prueba Nacional

### Primer Año:

18. La diferencia entre el número de bloques del primer cubo que armó Adolfo y el número de bloques del segundo que intentó armar es  $57 + 34 = 91$ . Observando la sucesión de cubos perfectos  $1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots$ , se comprueba que  $216 - 125 = 91$ , por lo tanto el primer cubo tenía 125 bloques y el número total de bloques era  $125 + 57 = 182$ .

**Solución alternativa:**  $n^3 + 57 = (n + 1)^3 - 34$ , por lo tanto  $n^3 + 57 = n^3 + 3n^2 + 3n - 33$  y simplificando  $3n^2 + 3n = 90$ , que también se puede escribir como  $n(n + 1) = 30$ . Como  $n$  es un número natural, debe ser 5 y por lo tanto Adolfo tenía  $5^3 + 57 = 182$  bloques.

### Segundo Año

19. Si Juan tenía inicialmente  $x$  naranjas, a Pedro le regaló  $(x + 1)/2$  y le quedaron  $(x - 1)/2$ . A Luis le regaló  $(x - 1)/6 + 1/3 = (x + 1)/6$  y le quedaron  $(x - 1)/2 - (x + 1)/6 = (2x - 4)/6 = (x - 2)/3$ . A Armando le regaló  $(x - 2)/12 + 1/4 = (x + 1)/12$  y le quedaron  $(x - 2)/3 - (x + 1)/12 = (3x - 9)/12 = (x - 3)/4 = 8$ . Por lo tanto Juan tenía inicialmente  $4 \cdot 8 + 3 = 35$  naranjas, a Pedro le regaló  $(35 + 1)/2 = 18$ , a Luis  $(17 + 1)/3 = 6$  y a Armando  $(11 + 1)/4 = 3$ .

**Solución alternativa:** Si antes de regalarle naranjas a Armando Juan tenía  $z$  naranjas, entonces  $z/4 + 1/4 + 8 = z$ , de donde  $3z = 33$  y  $z = 11$ . Análogamente, si antes de regalarle naranjas a Luis Juan tenía  $y$  naranjas, entonces  $y/3 + 1/3 + 11 = y$  de donde  $y = 17$ . Y finalmente, si inicialmente Juan tenía  $x$  naranjas, entonces  $x/2 + 1/2 + 17 = x$  y  $x = 35$ . A Pedro le regaló  $(35 + 1)/2 = 18$ , a Luis  $(17 + 1)/3 = 6$  y a Armando  $(11 + 1)/4 = 3$ .

### Tercer Año:

20. Supongamos que los números sumados por Diego fueron  $abba$  y  $cddc$ . Como al sumar dos números de la manera usual (columna por columna, de derecha a izquierda) a lo sumo nos podemos "llevar" uno en cada columna, el primer dígito de  $S$  debe ser necesariamente 1 (otra forma de verlo es que cada sumando es a lo sumo 9999, por lo cual la suma es a lo sumo 19998). Como  $S$  es capicúa, su dígito de las unidades es también 1, es decir que  $S$  es de la forma  $1xyx1$ .

$$\begin{array}{r} abba \\ + cddc \\ \hline 1xyx1 \end{array}$$

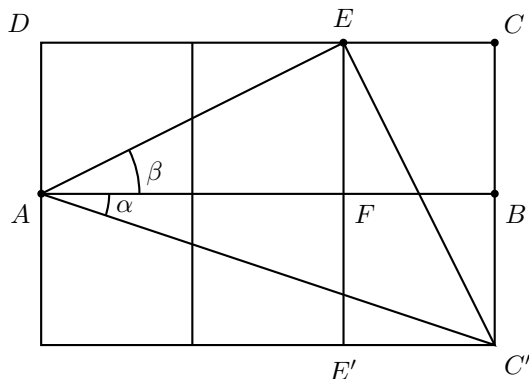
Entonces  $a + c$  sólo puede ser 1 u 11. Pero si fuese 1,  $a$  o  $c$  sería 0 y uno de los sumandos no tendría cuatro cifras. Por lo tanto  $a + c = 11$ .

Supongamos ahora que en la segunda columna no nos llevemos nada, es decir que  $b + d + 1 < 10$ . En ese caso  $x = b + d + 1$  y como en la tercera columna tampoco hay acarreo será  $y = b + d = x - 1$ . Al sumar la cuarta columna vemos que  $x = 1$ , por lo tanto  $y = 0$  y el resultado sería 11011, que tiene una cifra 0. Al descartar esta posibilidad se debe tener entonces  $b + d + 1 \geq 10$ . En ese caso al sumar la segunda columna se tiene  $b + d + 1 = 10 + x$  y al sumar la tercera columna se obtiene  $b + d + 1 = 10 + y$ , por lo tanto  $x = y$ . Al sumar la cuarta columna se tiene  $a + c + 1 = 12$ , es decir  $x = 2$  y el resultado es 12221. En conclusión Diego sólo pudo obtener como resultado  $S$  de su suma 12221. Algunos de los pares de capicúas que pudo haber sumado María son 9999 y 2222, 9889 y 2332, 7667 y 4554, etc.

**21.** De  $a + b = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  se deduce que  $1 = a - b$ , o  $a = b + 1$ . Sustituyendo este valor en la igualdad  $ab = a + b$  resulta  $(b + 1)b = 2b + 1$ , o  $b^2 - b - 1 = 0$ . La única raíz positiva de esta ecuación es  $b = (1 + \sqrt{5})/2$ , de donde  $a = (3 + \sqrt{5})/2$ . Alternativamente se puede sustituir  $b = a - 1$  en  $ab = a + b$  para obtener  $a^2 - 3a + 1 = 0$ , que tiene raíces  $a_1 = (3 + \sqrt{5})/2$  y  $a_2 = (3 - \sqrt{5})/2$ . La primera  $(3 + \sqrt{5})/2$  da lugar a  $b = (1 + \sqrt{5})/2$ , que es la solución hallada anteriormente, mientras que la segunda  $a_2 = (3 - \sqrt{5})/2$  se descarta porque da un valor negativo para  $b$ .

**Cuarto Año:**

**22.** (Solución de Freddy J. Sánchez González, U.E. Cnel. Miguel A. Vásquez, Maracaibo, Estado Zulia. Esta solución ganó el premio UNEXPO a la solución más creativa). Simetrizando la figura respecto a la recta  $AB$ , si  $C'$  es el simétrico de  $C$  se observa que  $\angle C'AB = \angle BAC = \alpha$ . Como  $AE = EC'$  el triángulo  $AEC'$  es isósceles, y como también es rectángulo en  $E$  resulta que  $\alpha + \beta = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$



**Solución alternativa:** De la figura se obtiene  $\text{tg } \alpha = 1/3$  y  $\text{tg } \beta = 1/2$ , por lo tanto

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{tg } \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1,$$

de donde  $\alpha + \beta = 45^\circ$ .

**Quinto Año:**

**23.** Supongamos que  $\{x\}$ ,  $[x]$  y  $x$  están en progresión geométrica de razón  $r$ . Es claro que ni  $\{x\}$  ni  $[x]$  pueden ser 0, pues entonces la progresión sería 0, 0, 0 y  $x$  no sería positivo. Si  $[x] \geq 1$ ,  $\{x\} > 0$  y  $x/[x] = [x]/\{x\} = r$ , sustituyendo  $[x] = r\{x\}$  y  $x = r[x] = r^2\{x\}$  en  $x = [x] + \{x\}$  resulta  $r^2\{x\} = r\{x\} + \{x\}$ , y dividiendo entre  $\{x\}$  queda  $r^2 = r + 1$ , cuya única raíz positiva es  $r = (1 + \sqrt{5})/2$  (esto en realidad es inmediato si se observa que  $[x]$  y  $x$  están en razón áurea y por lo tanto como es bien sabido  $r = (1 + \sqrt{5})/2$ ). Ahora bien, como debe ser  $\{x\} < 1$ , debe cumplirse  $[x] = r\{x\} < r = (1 + \sqrt{5})/2 < (1 + \sqrt{4})/2 = 3/2$ , lo que deja como único valor posible para  $[x]$  el 1 y por tanto  $x = r[x] = (1 + \sqrt{5})/2$  es la única solución.