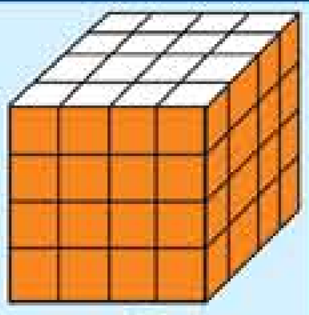
Los favoritos de la JUVENIL

OLIMPÍADA MATEMÁTICA 2011

Problemas de prueba preliminar o concurso canguro

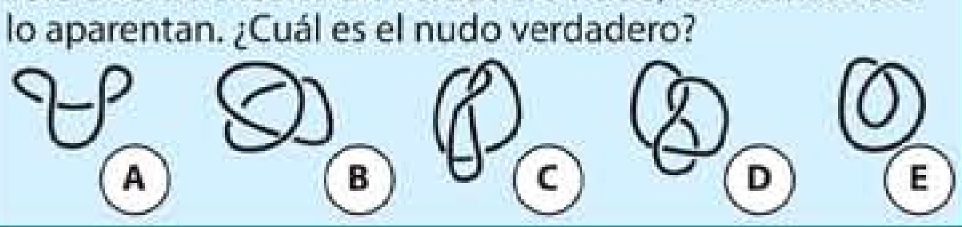
Primer año

1 Un cubo grande está formado por 64 pequeños cubos blancos, de igual tamaño. Si 5 de las caras del cubo grande se pintan de anaranjado, ¿cuántos cubos pequeños quedan con tres caras pintadas de color naranja?

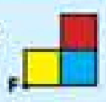


(A) 24 (B) 20 (C) 16 (D) 8 (E) 4

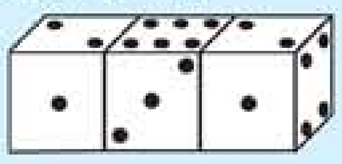
2 La figura muestra cinco proyecciones de nudos. Pero sólo uno de ellos es un verdadero nudo, los demás sólo lo aparentan. ¿Cuál es el nudo verdadero?



Segundo año

3 Si la figura  se gira media vuelta alrededor del punto F, el resultado es:

4 Tres dados idénticos se pegan juntos como muestra la figura. La suma de los puntos de dos caras opuestas de un dado es siempre 7. ¿Cuál es la suma de los puntos de las caras que están pegadas?



(A) 12 (B) 14 (C) 13 (D) 16 (E) 15

Tercer año

5 ¿Cuál es el menor número de líneas rectas necesarias para dividir el plano en exactamente 5 regiones?

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) otra respuesta

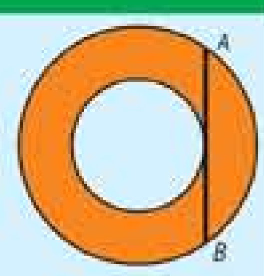
6 En la figura hay nueve regiones dentro de los círculos. Los números del 1 al 9 se colocan, uno en cada región, de manera tal que la suma de los números dentro de cualquier círculo sea 11.

¿Qué número va en la región señalada con el signo de interrogación?

(A) 6 (B) 5 (C) 9 (D) 7 (E) 8

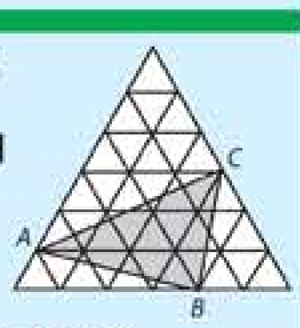
Cuarto año

7 La cuerda AB es tangente a la menor de dos circunferencias concéntricas. Si $AB = 16$, ¿cuál es el área de la región anaranjada?



(A) 32π (B) 63π (C) 64π (D) $32\pi^2$ (E) Depende del radio de los círculos.

8 El triángulo equilátero más grande está dividido en 36 triangulitos equiláteros de área 1 cm^2 cada uno. Halle el área del triángulo ABC.



(A) 11 cm^2 (B) 12 cm^2 (C) 13 cm^2 (D) 14 cm^2 (E) 15 cm^2

Quinto año

9 En una bolsa hay pelotas de tres colores: azules, verdes y rojas (hay al menos una de cada color). Se sabe que, si se extraen al azar y con los ojos vendados cinco pelotas, siempre se obtendrán al menos dos rojas y al menos tres serán del mismo color. ¿Cuántas bolas azules hay en la bolsa?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) Es imposible determinarlo sin información más detallada

10 La función f está definida para todos los reales positivos y cumple

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x,$$

para todo $x > 0$. ¿Cuál es el valor de $f(6)$?

(A) 923 (B) 1 (C) 1013 (D) 2009 (E) 993

Problemas de prueba regional

Primer año

11 Halle todos los enteros positivos de dos o más cifras tales que el número formado por cada par de dígitos consecutivos sea un cuadrado perfecto. Por ejemplo, 816 es uno de esos números, ya que $81 = 9^2$ y $16 = 4^2$, pero 8167 no lo es porque 67 no es un cuadrado perfecto.

Segundo año

12 Sea $N = 2^{2010} \cdot 125^{671}$. Halle
(a) el número de cifras de N,
(b) la suma de todas las cifras de N.

Tercer año

13 En una pecera viven unos pequeños seres llamados *bupis*, y un pez que se alimenta de ellos, comiendo 30 *bupis* cada día. Al finalizar cada día, si hay menos de 100 *bupis* éstos se reproducen, engendrando cada uno de ellos otro idéntico, doblando así su número total. Si hay 100 o más *bupis* no hay reproducción, tal vez por falta de espacio. Suponga que inicialmente hay 97 . Durante el primer día el pez se come 30, dejando 67, que se reproducen y llegan a 134. El segundo día el pez se come 30 y quedan 104 (no se reproducen pues $104 \geq 100$). El tercer día los 104 se reducen a 74, se reproducen y quedan 148. Continuando de esta manera, ¿cuántos *bupis* habrá al finalizar el día número 1000?

Cuarto año

14 Ana y Bernardo juegan de la siguiente manera: Ana comienza diciendo un número entero del 1 al 10. Bernardo debe responder diciendo un número que sea mayor o igual que el doble y menor o igual que el triple del que dijo Ana. Ana a su vez debe responder con un número que sea mayor o igual que el doble y menor o igual que el triple del que dijo Bernardo, y así sucesivamente. Gana el que primero diga un número mayor que 100. Muestre que Ana siempre puede ganar este juego.

15 En un triángulo ABC, el ángulo B mide 20º y el ángulo C mide 40º. La longitud de la bisectriz trazada desde el vértice A es 2. Halle $BC - AB$.

Respuestas en: www.olimpiadarecreativa.com y www.acm.org.ve

ASOCIACIÓN VENEZOLANA DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

ASOCIACIÓN MATEMÁTICA VENEZOLANA

FUNDECOM Fundación para el Desarrollo de Competencias

RIF: J-00110574-3

HECHO EL DEPÓSITO DE LEY
Depósito Legal CA2592010114

Coordinadores
Olimpiada Recreativa de Matemática: Prof. Jorge Salazar
Olimpiada Juvenil de Matemática: Prof. Rafael Sánchez
Diseño gráfico: Rogelio F. Chovet
Producción gráfica: Litografía ImagenColor S.A.
3.000 ejemplares

Quinto año

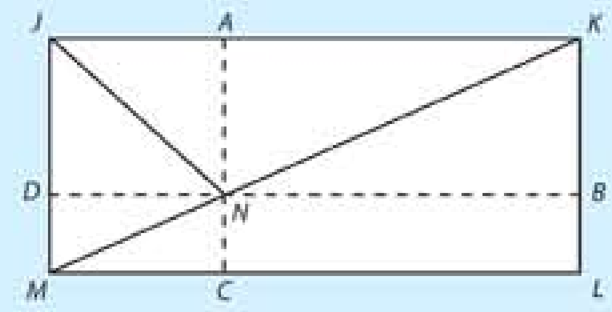
16 (a) Pruebe la igualdad

$$\frac{n^2}{(n-1)(n+1)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

(b) Calcule el valor exacto de

$$\frac{2^2}{1\cdot 3} + \frac{3^2}{2\cdot 4} + \frac{4^2}{3\cdot 5} + \dots + \frac{2010^2}{2009\cdot 2011}$$

17 En el rectángulo $JKLM$, la bisectriz del ángulo KJM corta a la diagonal KM en el punto N. Si las distancias de N a los lados LM y KL son, respectivamente, 1 y 8, ¿cuánto mide el lado LM?



Problemas de prueba nacional

Primer año

18 Adolfo tiene una gran cantidad de bloques cúbicos idénticos. Con ellos arma un cubo grande, que tiene n bloques por lado, y le sobran 57 bloques. Luego trata de armar un cubo con n + 1 bloques por lado, pero comprueba que para eso le faltan 34 bloques. ¿Cuántos bloques tiene Adolfo?

Segundo año

19 Juan tiene un saco lleno de naranjas. A Pedro le regala la mitad de las naranjas más media naranja, a Luis le regala la tercera parte de las que le quedan más un tercio de naranja y a Armando la cuarta parte de lo que le queda más un cuarto de naranja. Al final, a Juan le quedaron 8 naranjas. ¿Cuántas naranjas tenía al principio? ¿Cuántas dio a cada amigo?

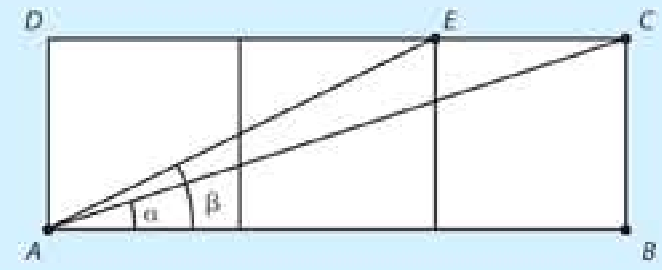
Tercer año

20 Diego sumó dos números capicúas de cuatro cifras cada uno y observó con asombro que el resultado era otro número capicúa S pero de cinco cifras, ninguna de ellas nula. Encuentre todos los posibles valores de S y, en cada caso, muestre al menos dos maneras en que Diego podría obtener esos valores.
Nota: Un número es *capicúa* si se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo 2772 y 39493 son capicúas.

21 Halle dos números reales positivos a y b tales que su suma a+b, su producto ab y la diferencia de sus cuadrados $a^2 - b^2$ sean iguales.

Cuarto año

22 La figura muestra un rectángulo $ABCD$ dividido en tres cuadrados iguales, y los ángulos $\alpha = \angle BAC$ y $\beta = \angle BAE$. Halle el valor exacto, en grados, de $\alpha + \beta$.



Quinto año

23 Si x es un número real positivo, se denota con $[x]$ la *parte entera* de x (el mayor entero que no supera a x) y con $\{x\}$ la *parte fraccionaria* de x, es decir $\{x\} = x - [x]$. Por ejemplo, si $x = 2{,}47$ entonces $[x] = 2$ y $\{x\} = 0{,}47$. Halle todos los números reales positivos x para los cuales la secuencia $\{x\}$, $[x]$, x está en progresión geométrica.

fundación EMPRESAS POLAR

RIF J-00110574-3