Primer Día

6 de octubre de 2009

Duración: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema tiene valor de 7 puntos.

Problemas

1. Sea $P(n)$ el producto de los dígitos no nulos del entero positivo n. Por ejemplo $P(4) = 4$, $P(50) = 5$, $P(123) = 6$, $P(2009) = 18$. Halle el valor de la suma:
$$P(1) + P(2) + \cdots + P(2008) + P(2009).$$

2. Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se intersectan en los puntos A y B. Considere una circunferencia Γ contenida en Γ_1 y Γ_2, tangente a ellas respectivamente en D y E. Sean C uno de los puntos de intersección de la recta AB con Γ, F la intersección de la recta EC con Γ_2 y G la intersección de la recta DC con Γ_1. Sean H e I los puntos de intersección de la recta ED con Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Demuestre que F, G, H e I están sobre una misma circunferencia.

3. Se tienen 2009 cajas numeradas del 1 al 2009, algunas de las cuales contienen piedras. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A. Una jugada consiste en seleccionar una caja i que no esté vacía, tomar una o más piedras de esa caja y ponerlas en la caja $i + 1$. Si $i = 2009$, las piedras que se tomen se desechan. El jugador que retire la última piedra (dejando todas las cajas vacías) gana.

    a) Suponiendo que inicialmente en la caja 2 hay 2009 piedras y todas las demás cajas (1, 3, 4, 5,…, 2009) están vacías, halle una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores y justifíquela.

    b) Suponiendo que inicialmente cada caja contiene exactamente una piedra, halle una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores y justifíquela.